О МИНИМАЛЬНЫХ НАБОРАХ ИНДЕКСОВ

Е. А. Тимошенко

Обозначим $s = [\frac{n}{2}]$, $l = [\frac{n+1}{2}]$, $M_n = C_n^s = C_n^l$; индексы, которые составлены для случая n столбцов (т. е. упорядоченные подмножества множества $\{1, 2, \dots, n\}$), мы назовём *n-индексами.*

Длину индекса a будем обозначать $\|a\|$. Если $0 \leqslant i \leqslant \|a\|$, то через $S_i(a)$ будем обозначать множество, составленное из первых i элементов индекса a. Всякое множество, состоящее ровно из i элементов, называем *i-элементным.* Мощность множества A будет обозначаться через $|A|$.

Требуется построить такой набор n-индексов U, что для всякого подмножества $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ существует индекс $a \in U$, удовлетворяющий условию $S_{|A|}(a) = A$. При любом $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ каждое i-элементное подмножество из $\{1, 2, \dots, n\}$ должно попасть в начало хотя бы одного индекса, а следовательно, количество индексов не может быть меньше чем C_n^i. В частности, рассматривая s-элементные подмножества из $\{1, 2, \dots, n\}$, получаем, что количество индексов не меньше числа $M_n = C_n^s$.

Из этих M_n (или более) индексов длины s хотя бы C_n^{s+1} индекс надо удлинить на один элемент. Из них затем ещё как минимум C_n^{s+2} надо удлинить ещё на один элемент и т. д. В самом конце один ($C_n^n = 1$) из индексов, уже достигших длины $n-1$, надо будет удлинить ещё на один элемент. Получаем, что суммарная длина индексов не может быть меньше числа $L_n = sC_n^s + C_n^{s+1} + C_n^{s+2} + \dots + C_n^n$.

Напомним, что при любом $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ справедлива формула $C_{n+1}^i = C_n^{i-1} + C_n^i$. Кроме того, при $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ выполнено $C_n^i = C_n^{n-i}$. Заметим также, что $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$. Тогда получаем:

а) если $n = 2s+1$, то $L_n = sC_n^s + \frac{1}{2} \cdot 2^n = sM_n + 2^{n-1}$;

б) если $n = 2s$, то $L_n = sC_n^s + \frac{1}{2}(2^n - C_n^s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) C_n^s + 2^{n-1} = \left(s - \frac{1}{2}\right) M_n + 2^{n-1}$.

В обоих случаях имеем равенство $L_n = \frac{(n-1)M_n}{2} + 2^{n-1}$.

Набор n-индексов U назовём *минимальным*, если:

1) набор удовлетворяет условиям исходной задачи, т. е. для любого $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ найдётся индекс $a \in U$ такой, что $S_{|A|}(a) = A$;

2) набор содержит ровно M_n индексов;

3) суммарная длина индексов набора равна L_n.

Из сказанного выше следует, что для минимального набора n-индексов (если такой набор существует) выполнено:

I. Каждый индекс набора имеет длину не менее l (при нечётном n это следует из равенства $C_n^s = C_n^l$).

II. Набор содержит ровно C_n^{l+1} индексов, имеющих длину не менее $l+1$; ровно C_n^{l+2} индексов, имеющих длину не менее $l+2$; ... ; C_n^{n-1} индексов, имеющих длину не менее $n-1$, и один ($C_n^n = 1$) индекс длины n.

Назовём n-индекс a минимального набора *длинным*, если выполнено $\|a\| \geqslant l+1$ (общее количество таких индексов равно $Д_n = C_n^{l+1}$). Остальные индексы набора назовём *короткими*, их количество равно $K_n = M_n - Д_n$.

Минимальный набор n-индексов U назовём *хорошим*, если он обладает свойством

$$\begin{array}{l}\text{для всякого натурального } i \leqslant n \text{ и } i\text{-элементного множества} \\ A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \text{ найдётся индекс } a \in U \text{ такой, что } S_i(a) = A \\ \text{и } \|a\| \geqslant n - i.\end{array} \qquad (*)$$

Заметим, что в этом условии достаточно проверить все $i < \frac{n}{2}$ (если $i \geqslant \frac{n}{2}$, то сразу $\|a\| \geqslant i$ и, значит, $\|a\| + i \geqslant n$). Ясно также, что условие $(*)$ выполнено при $i = 0$.

Пусть a — некоторый n-индекс (предполагаем $\|a\| \geqslant \frac{n}{2}$). Через $F_{n+1}(a)$ обозначим $(n+1)$-индекс, который получается вставкой элемента, равного $n+1$, в индекс a (при этом элемент должен быть вставлен так, чтобы в индексе $F_{n+1}(a)$ он стоял m-м по счёту, где $m = n + 1 - \|a\| \leqslant \|a\| + 1$).

Теорема. *Для любого натурального n существует хороший набор n-индексов.*

Доказательство. База индукции (для $n = 1$) очевидна.

Шаг индукции разобьём на два случая.

а) Пусть уже построен хороший набор $(2k-1)$-индексов U. Набор $2k$-индексов V мы зададим равенством $V = U \cup V'$, где $V' = \{F_{2k}(a) \mid a \in U\}$. Проверим, что набор V минимален.

1) Пусть $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2k\}$ и $B = A \setminus \{2k\}$, где $|B| = i$. По предположению индукции найдётся $(2k-1)$-индекс $a \in U \subset V$ такой, что $S_i(a) = B$ и $\|a\| \geqslant 2k - 1 - i$. Если $2k \notin A$, то $S_i(a) = A$. Предположим теперь, что $2k \in A$. Тогда $2k$-индекс $b = F_{2k}(a) \in V$ имеет

элемент $2k$ на m-м месте, где $m = 2k - \|a\| \leqslant i + 1$. Отсюда $S_{i+1}(b) = A$. Следовательно, набор V удовлетворяет условиям исходной задачи.

2) Количество индексов, входящих в набор V, равно

$$|V| = |U| + |V'| = 2M_{2k-1} = 2C_{2k-1}^{k-1} = C_{2k-1}^{k-1} + C_{2k-1}^{k} = C_{2k}^{k} = M_{2k}.$$

3) Суммарная длина индексов набора U равна L_{2k-1}, а значит, суммарная длина индексов набора V' равна $L_{2k-1} + |V'| = L_{2k-1} + M_{2k-1}$. В этом случае для суммарной длины индексов набора V получаем выражение

$$\begin{aligned} 2L_{2k-1} + M_{2k-1} &= 2\left(\frac{(2k-2)M_{2k-1}}{2} + 2^{2k-2}\right) + M_{2k-1} = \\ &= (2k-2)M_{2k-1} + 2^{2k-1} + M_{2k-1} = \\ &= (2k-1)M_{2k-1} + 2^{2k-1} = \frac{(2k-1)M_{2k}}{2} + 2^{2k-1} = L_{2k}, \end{aligned}$$

что и требовалось. Итак, набор V действительно является минимальным.

Покажем, что набор V хороший. Для этого выберем $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ и некоторое i-элементное множество $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2k\}$. Рассмотрим два случая.

• Пусть $2k \in A$; обозначим $B = A \setminus \{2k\}$, тогда $|B| = i - 1$. По предположению индукции найдётся $(2k-1)$-индекс $a \in U$ такой, что $S_{i-1}(a) = B$ и $\|a\| \geqslant 2k - i$. Тогда $2k$-индекс $b = F_{2k}(a) \in V$ получается из a вписыванием элемента $2k$ на m-е место, где $m = 2k - \|a\| \leqslant i$. Это значит, что $\|b\| \geqslant 2k - i$ и $S_i(b) = A$, т. е. индекс b обеспечивает справедливость условия $(*)$ для набора V.

• Пусть $2k \notin A$. Тогда по предположению индукции найдётся $(2k-1)$-индекс $a \in U$, для которого выполнено $S_i(a) = A$ и $\|a\| \geqslant 2k - 1 - i$. Если $\|a\| \geqslant 2k - i$, то $2k$-индекс $a \in V$ обеспечивает справедливость условия $(*)$ для набора V. Если же $\|a\| = 2k - 1 - i$, то $2k$-индекс $b = F_{2k}(a) \in V$ отличается от a лишь элементом $2k$, вписанным на $(i+1)$-е место. Следовательно, $\|b\| = 2k - i$ и $S_i(b) = A$. Итак, набор V удовлетворяет условию $(*)$.

б) Пусть уже построен хороший набор $2k$-индексов U. Набор $(2k+1)$-индексов V зададим равенством $V = V' \cup V''$, где V' — множество всех длинных индексов набора U и $V'' = \{F_{2k+1}(a) \mid a \in U\}$. Проверим, что набор V минимален.

1) Пусть $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2k+1\}$ и $B = A \setminus \{2k+1\}$, где $|B| = i$. По предположению индукции найдётся $2k$-индекс $a \in U$ такой, что $S_i(a) = B$ и $\|a\| \geqslant 2k - i$. Если $2k + 1 \notin A$

и $\|a\| \geqslant k+1$, то $a \in V' \subset V$ и $S_i(a) = A$. Если $2k+1 \notin A$ и выполнено $\|a\| = k$, то $(2k+1)$-индекс $b = F_{2k+1}(a) \in V$ отличается от a лишь приписанным справа элементом $2k+1$, т. е. $S_i(b) = A$.

Предположим теперь, что $2k+1 \in A$. Тогда $(2k+1)$-индекс $b = F_{2k+1}(a) \in V$ имеет элемент $2k+1$ на m-м месте, где $m = 2k+1-\|a\| \leqslant i+1$. Следовательно, $S_{i+1}(b) = A$. Итак, набор V удовлетворяет условиям исходной задачи.

2) Количество индексов, входящих в набор V, равно

$$|V| = |V'| + |V''| = Д_{2k} + M_{2k} = C_{2k}^{k+1} + C_{2k}^{k} = C_{2k+1}^{k+1} = M_{2k+1}.$$

3) Суммарная длина индексов набора U равна L_{2k}, следовательно, суммарная длина индексов набора V'' равна $L_{2k} + |V''| = L_{2k} + M_{2k}$. Суммарная длина всех коротких индексов набора U равна числу $k \cdot K_{2k}$, а всех длинных — числу $L_{2k} - k \cdot K_{2k}$. Тогда для суммарной длины индексов набора V получаем выражение

$$\begin{aligned}2L_{2k} + M_{2k} - k \cdot K_{2k} = 2\left(\frac{(2k-1)M_{2k}}{2} + 2^{2k-1}\right) + M_{2k} - k(M_{2k} - Д_{2k}) = \\ = (2k-1)M_{2k} + 2^{2k} + M_{2k} - kM_{2k} + kД_{2k} = kM_{2k} + 2^{2k} + kД_{2k} = \\ = kC_{2k}^{k} + 2^{2k} + kC_{2k}^{k+1} = kC_{2k+1}^{k+1} + 2^{2k} = kM_{2k+1} + 2^{2k} = L_{2k+1}.\end{aligned}$$

Следовательно, набор V действительно является минимальным.

Убедимся, что набор V хороший. Выберем $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ и некоторое i-элементное множество $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2k+1\}$. Рассмотрим два случая.

• Пусть $2k+1 \in A$; обозначим $B = A \setminus \{2k+1\}$, тогда $|B| = i-1$. По предположению индукции существует $2k$-индекс $a \in U$ такой, что $S_{i-1}(a) = B$ и $\|a\| \geqslant 2k+1-i$. Тогда $(2k+1)$-индекс $b = F_{2k+1}(a) \in V$ получается из a вписыванием элемента $2k+1$ на m-е место, где $m = 2k+1-\|a\| \leqslant i$. Это значит, что $\|b\| \geqslant 2k+1-i$ и $S_i(b) = A$, т. е. индекс b обеспечивает справедливость условия $(*)$ для набора V.

• Пусть $2k+1 \notin A$. Тогда по предположению индукции найдётся $2k$-индекс $a \in U$ такой, что $S_i(a) = A$ и $\|a\| \geqslant 2k-i$. Если $\|a\| \geqslant 2k+1-i$, то $2k$-индекс a является длинным, т. е. $(2k+1)$-индекс $a \in V' \subset V$ обеспечивает справедливость условия $(*)$ для набора V. Если же $\|a\| = 2k-i$, то $(2k+1)$-индекс $b = F_{2k+1}(a) \in V$ отличается от a лишь элементом $2k+1$, вписанным на $(i+1)$-е место. Следовательно, $\|b\| = 2k+1-i$ и $S_i(b) = A$. Таким образом, набор V удовлетворяет условию $(*)$. □

Хорошие наборы n-индексов для малых n

Для $n = 1$:

(1)

Для $n = 2$:

$(2, 1)$

(1)

Для $n = 3$:

$(3, 2, 1)$

$(1, 3)$

$(2, 1)$

Для $n = 4$:

$(4, 3, 2, 1)$

$(1, 4, 3)$

$(2, 4, 1)$

$(3, 2, 1)$

$(1, 3)$

$(2, 1)$

Для $n = 5$:

$(5, 4, 3, 2, 1)$

$(1, 5, 4, 3)$

$(2, 5, 4, 1)$

$(3, 5, 2, 1)$

$(4, 3, 2, 1)$

$(1, 3, 5)$

$(2, 1, 5)$

$(1, 4, 3)$

$(2, 4, 1)$

$(3, 2, 1)$

Для $n = 6$:

$(6, 5, 4, 3, 2, 1)$

$(1, 6, 5, 4, 3)$

$(2, 6, 5, 4, 1)$

$(3, 6, 5, 2, 1)$

$(4, 6, 3, 2, 1)$

$(5, 4, 3, 2, 1)$

$(1, 3, 6, 5)$

$(2, 1, 6, 5)$

$(1, 4, 6, 3)$

$(2, 4, 6, 1)$

$(3, 2, 6, 1)$

$(1, 5, 4, 3)$

$(2, 5, 4, 1)$

$(3, 5, 2, 1)$

$(4, 3, 2, 1)$

$(1, 3, 5)$

$(2, 1, 5)$

$(1, 4, 3)$

$(2, 4, 1)$

$(3, 2, 1)$